SUPPLEMENTARY FIGURES AND TABLES

FIGURES AND TABLES LEGEND:

FIGURES:

- Figure 1: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 2$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, and values of $\rho \geq 0.45$.
- Figure 2: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 2$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$, and values of $\rho \geq 0.45$.
- Figure 3: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 4$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and values of $\rho \geq 0.45$.
- Figure 4: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 10$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and values of $\rho \geq 0.45$.
- Figure 5: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 100$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and values of $\rho \geq 0.50$.
- Figure 6: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 100$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and values of $\rho \leq 0.45$.
- Figure 7: Power of the tests with W (dashed line), G (two-dash), P (solid), M (dotted), A (dotdash) (100 000 simulated values each) for $d = 4$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and $\rho = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.60, 0.75, 0.85, 0.95$, at nominal size 0.05. Angle $= 1, \ldots, 8$, corresponds to separation between the population mean directions $\delta = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ degrees, respectively.
- Figure 8: Power of the tests with W (dashed line), G (two-dash), P (solid), M (dotted), A (dotdash) (100 000 simulated values each) for $d = 10$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and $\rho = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.60, 0.75, 0.85, 0.95$, at nominal size 0.05. Angle $= 1, \ldots, 8$, corresponds to separation between the population mean directions $\delta = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ degrees, respectively.
- Figure 9: Power of the tests with W (dashed line), G (two-dash), P (solid), M (dotted), A (dotdash) (100 000 simulated values each) for $d = 100$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and $\rho = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.60, 0.75, 0.85, 0.90$, at nominal size 0.05. Angle $= 1, \ldots, 8$, corresponds to separation between the population mean directions $\delta = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ degrees, respectively.

TABLES:

- Table 1: Actual size of the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), with assumed nominal sizes $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$, for $d = 2, 3$, $k = 2, 3$, selected sample sizes and values of $\rho \geq 0.45$.
- Table 2: Power of the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each) at nominal 0.05 significance level, when testing $k = 2$ groups with mean directions separated by δ degrees, for $d = 2, 3$, selected sample sizes and values of $\rho \geq 0.45$.
- Table 3: Power of the tests based on P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each) at nominal 0.05 significance level, when testing $k = 3$ groups with coplanar mean directions, two of which formed an angle of 2δ degrees and the third was the bisector of this angle, for $d = 2, 3$, selected sample sizes and values of $\rho \geq 0.45$.
- Table 4: Power of the tests P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each) at nominal size 0.05, when testing $k = 3$ groups, two of which shared a common mean direction and the third had a mean direction δ degrees away, for $d = 2, 3$, selected sample sizes and values of $\rho \geq 0.45$.
- Table 5: Power of the tests with statistics P and W (100 000 simulated values each) with critical values determined such that both tests achieve exactly the nominal size $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$, when $d = 2$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and the mean directions of the two groups are separated by δ degrees, for values of $\rho \geq 0.45$.
- Table 6: Power of the tests with statistics P and W (100 000 simulated values each) with critical values determined such that both tests achieve exactly the nominal size $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$, when $d = 3$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$, two of the groups have a common mean direction and the third group has a mean direction δ degrees away, for values of $\rho \geq 0.45$.

Figure 1: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 2$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$, and values of $\rho \geq 0.45$.

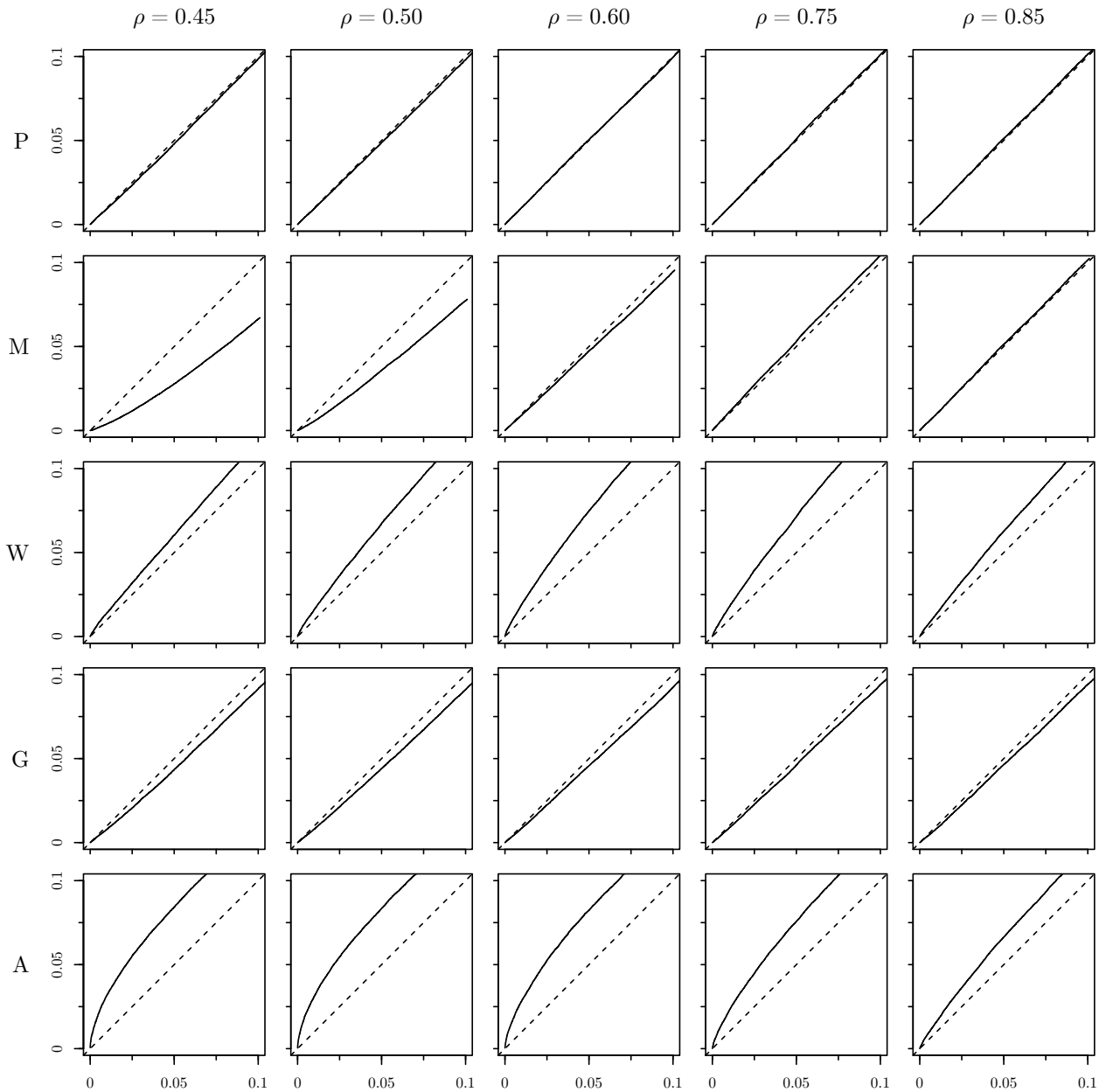

Figure 2: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 2$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$, and values of $\rho \geq 0.45$.

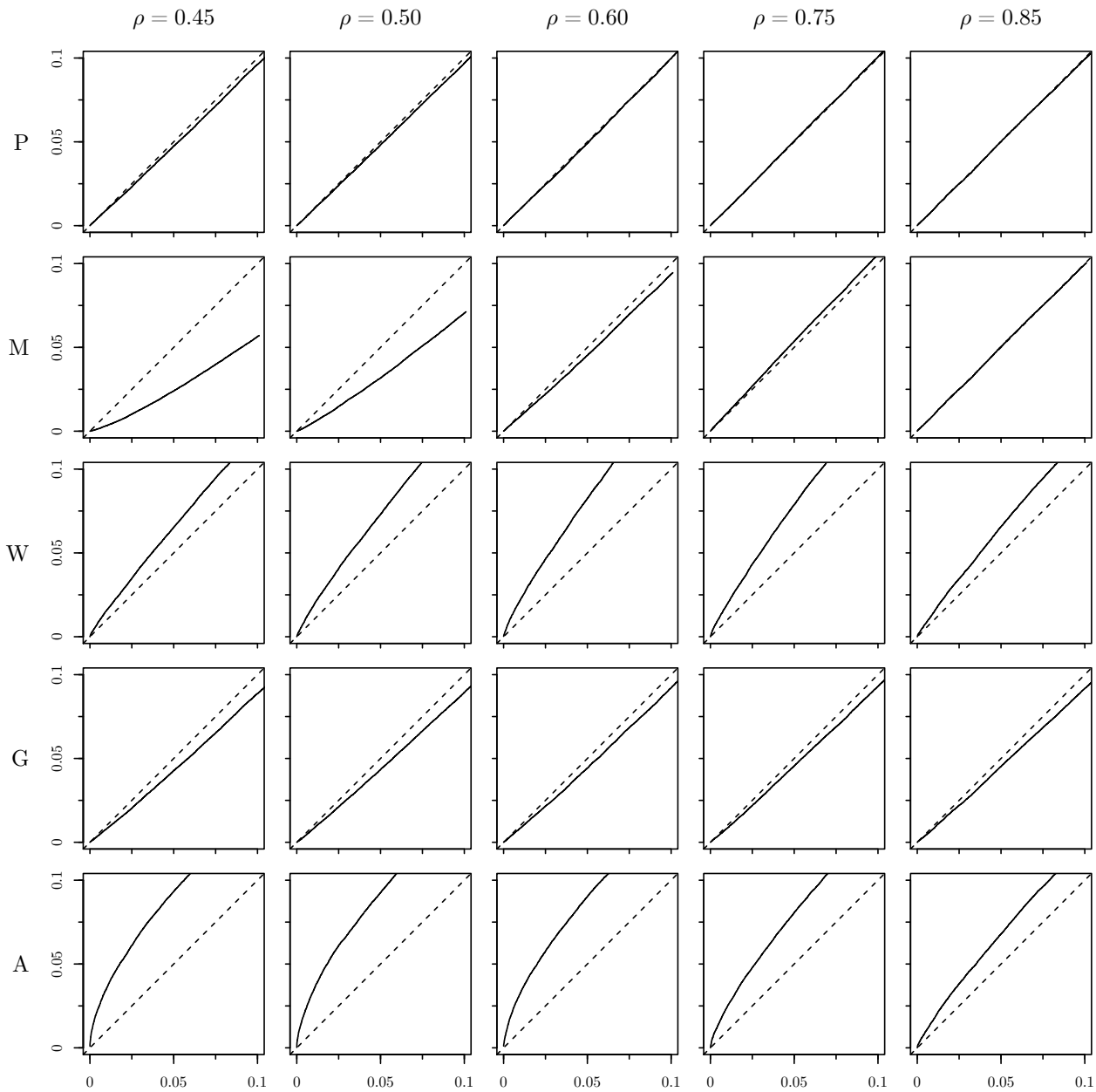

Table 1: Actual size of the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), with assumed nominal sizes $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$, for $d = 2, 3$, $k = 2, 3$, selected sample sizes and values of $\rho \geq 0.45$.

$d = 2$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$

$\rho =$	0.45			0.50			0.60			0.75			0.85			0.95		
$\alpha =$	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10
P	0.011	0.055	0.110	0.010	0.053	0.105	0.010	0.050	0.099	0.010	0.050	0.099	0.010	0.050	0.099	0.009	0.050	0.100
M	0.024	0.088	0.154	0.018	0.071	0.131	0.011	0.053	0.106	0.010	0.048	0.097	0.010	0.050	0.099	0.010	0.051	0.102
W	0.007	0.043	0.093	0.006	0.037	0.082	0.005	0.033	0.072	0.006	0.035	0.077	0.007	0.041	0.085	0.009	0.048	0.096
G	0.017	0.073	0.135	0.017	0.070	0.129	0.016	0.066	0.122	0.016	0.066	0.123	0.016	0.066	0.122	0.015	0.067	0.123
A	0.002	0.021	0.064	0.002	0.022	0.063	0.002	0.023	0.064	0.004	0.030	0.072	0.006	0.037	0.081	0.008	0.046	0.095

$d = 2$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$

$\rho =$	0.45			0.50			0.60			0.75			0.85			0.95		
$\alpha =$	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10
P	0.011	0.052	0.101	0.010	0.051	0.102	0.010	0.050	0.101	0.010	0.049	0.099	0.010	0.049	0.099	0.010	0.050	0.100
M	0.022	0.080	0.141	0.016	0.068	0.127	0.011	0.053	0.106	0.009	0.047	0.096	0.010	0.049	0.098	0.011	0.051	0.101
W	0.007	0.041	0.085	0.006	0.036	0.079	0.005	0.031	0.071	0.005	0.033	0.074	0.007	0.039	0.084	0.009	0.047	0.096
G	0.013	0.057	0.109	0.012	0.057	0.109	0.012	0.055	0.108	0.011	0.054	0.106	0.012	0.054	0.106	0.012	0.055	0.107
A	0.002	0.021	0.065	0.002	0.021	0.066	0.002	0.023	0.067	0.003	0.029	0.072	0.006	0.036	0.081	0.009	0.045	0.095

$d = 3$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$

$\rho =$	0.45			0.50			0.60			0.75			0.85			0.95		
$\alpha =$	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10
P	0.011	0.054	0.107	0.010	0.051	0.103	0.010	0.049	0.099	0.010	0.050	0.101	0.010	0.049	0.099	0.010	0.050	0.100
M	0.012	0.058	0.113	0.011	0.053	0.107	0.009	0.048	0.099	0.010	0.049	0.099	0.009	0.049	0.098	0.010	0.050	0.100
W	0.018	0.076	0.139	0.014	0.065	0.124	0.011	0.054	0.106	0.010	0.051	0.102	0.010	0.049	0.099	0.010	0.050	0.100
G	0.018	0.073	0.134	0.016	0.069	0.129	0.015	0.066	0.124	0.016	0.068	0.126	0.015	0.067	0.125	0.015	0.067	0.127
A	0.004	0.031	0.076	0.004	0.031	0.075	0.004	0.031	0.075	0.006	0.038	0.085	0.007	0.043	0.089	0.009	0.048	0.097

$d = 3$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$

$\rho =$	0.45			0.50			0.60			0.75			0.85			0.95		
$\alpha =$	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10
P	0.011	0.051	0.103	0.011	0.050	0.101	0.010	0.051	0.101	0.010	0.051	0.101	0.010	0.049	0.099	0.011	0.051	0.101
M	0.013	0.060	0.117	0.012	0.055	0.110	0.010	0.051	0.101	0.010	0.050	0.099	0.010	0.048	0.098	0.011	0.051	0.101
W	0.019	0.076	0.140	0.016	0.067	0.125	0.012	0.057	0.109	0.010	0.052	0.102	0.010	0.049	0.099	0.011	0.051	0.101
G	0.012	0.057	0.111	0.012	0.056	0.109	0.012	0.056	0.109	0.012	0.057	0.109	0.011	0.054	0.107	0.012	0.057	0.109
A	0.004	0.030	0.075	0.004	0.031	0.075	0.004	0.033	0.077	0.006	0.039	0.084	0.007	0.042	0.089	0.010	0.049	0.098

Table 1 continued:

$d = 2$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (10, 10, 10)$

$\rho =$	0.45			0.50			0.60			0.75			0.85			0.95		
$\alpha =$	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10
P	0.012	0.059	0.114	0.011	0.055	0.108	0.011	0.052	0.101	0.009	0.048	0.098	0.010	0.049	0.098	0.010	0.049	0.098
M	0.029	0.100	0.173	0.019	0.078	0.141	0.012	0.055	0.107	0.009	0.046	0.094	0.010	0.049	0.098	0.010	0.050	0.100
W	0.006	0.042	0.088	0.005	0.035	0.076	0.005	0.028	0.065	0.005	0.030	0.067	0.007	0.038	0.080	0.009	0.045	0.093
G	0.019	0.078	0.143	0.018	0.073	0.136	0.017	0.068	0.127	0.015	0.066	0.123	0.015	0.066	0.124	0.015	0.066	0.126
A	0.001	0.018	0.055	0.001	0.019	0.055	0.002	0.020	0.057	0.004	0.026	0.066	0.006	0.034	0.077	0.008	0.044	0.092

$d = 2$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$

$\rho =$	0.45			0.50			0.60			0.75			0.85			0.95		
$\alpha =$	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10
P	0.011	0.053	0.104	0.010	0.052	0.103	0.010	0.051	0.100	0.010	0.050	0.099	0.010	0.050	0.101	0.010	0.050	0.100
M	0.025	0.090	0.160	0.018	0.074	0.136	0.011	0.055	0.107	0.009	0.047	0.095	0.010	0.050	0.101	0.010	0.051	0.102
W	0.006	0.037	0.080	0.005	0.032	0.071	0.004	0.028	0.063	0.005	0.030	0.066	0.007	0.037	0.080	0.009	0.046	0.094
G	0.012	0.059	0.112	0.012	0.057	0.111	0.012	0.056	0.108	0.012	0.055	0.108	0.012	0.055	0.109	0.012	0.055	0.108
A	0.001	0.018	0.056	0.001	0.018	0.056	0.002	0.020	0.059	0.003	0.027	0.067	0.005	0.035	0.079	0.008	0.045	0.093

$d = 3$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (10, 10, 10)$

$\rho =$	0.45			0.50			0.60			0.75			0.85			0.95		
$\alpha =$	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10
P	0.011	0.053	0.106	0.010	0.052	0.104	0.010	0.050	0.101	0.010	0.050	0.100	0.010	0.051	0.100	0.010	0.050	0.100
M	0.012	0.058	0.116	0.011	0.055	0.110	0.010	0.050	0.101	0.010	0.048	0.097	0.010	0.050	0.099	0.010	0.050	0.100
W	0.020	0.082	0.151	0.016	0.071	0.132	0.012	0.057	0.112	0.010	0.050	0.101	0.010	0.051	0.100	0.010	0.050	0.100
G	0.018	0.074	0.137	0.017	0.072	0.134	0.016	0.070	0.132	0.016	0.068	0.130	0.016	0.070	0.129	0.016	0.070	0.129
A	0.003	0.027	0.068	0.003	0.029	0.070	0.004	0.031	0.073	0.006	0.036	0.081	0.007	0.042	0.089	0.009	0.047	0.097

$d = 3$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$

$\rho =$	0.45			0.50			0.60			0.75			0.85			0.95		
$\alpha =$	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10	0.01	0.05	0.10
P	0.011	0.052	0.103	0.011	0.051	0.102	0.010	0.050	0.100	0.009	0.049	0.099	0.010	0.051	0.100	0.009	0.050	0.100
M	0.014	0.064	0.122	0.012	0.058	0.113	0.010	0.050	0.100	0.009	0.048	0.097	0.010	0.050	0.099	0.009	0.050	0.100
W	0.022	0.087	0.155	0.017	0.073	0.136	0.012	0.057	0.112	0.010	0.050	0.100	0.010	0.051	0.100	0.009	0.050	0.100
G	0.012	0.058	0.112	0.012	0.057	0.111	0.012	0.056	0.109	0.011	0.055	0.108	0.012	0.056	0.109	0.011	0.056	0.109
A	0.003	0.028	0.070	0.003	0.029	0.071	0.004	0.030	0.073	0.005	0.036	0.081	0.007	0.042	0.088	0.009	0.047	0.096

Table 2: Power of the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each) at nominal 0.05 significance level, when testing $k = 2$ groups with mean directions separated by δ degrees, for $d = 2, 3$, selected sample sizes and values of $\rho \geq 0.45$.

$d = 2$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.09	0.05	0.08	0.02	0.05	0.07	0.04	0.07	0.02	0.05	0.06	0.04	0.07	0.03	0.06	0.05	0.04	0.07	0.03	0.06	0.06	0.05	0.08	0.05	0.09	0.09	0.09	0.11	0.08
10	0.06	0.10	0.05	0.08	0.02	0.06	0.08	0.04	0.08	0.03	0.06	0.07	0.04	0.08	0.03	0.08	0.08	0.06	0.10	0.05	0.10	0.10	0.09	0.13	0.08	0.21	0.21	0.20	0.25	0.20
15	0.07	0.11	0.06	0.09	0.03	0.07	0.10	0.05	0.09	0.03	0.08	0.09	0.06	0.10	0.04	0.12	0.11	0.09	0.14	0.08	0.17	0.17	0.14	0.20	0.13	0.42	0.42	0.40	0.47	0.40
20	0.09	0.13	0.07	0.11	0.04	0.09	0.12	0.07	0.11	0.04	0.11	0.12	0.08	0.13	0.06	0.17	0.16	0.13	0.20	0.11	0.26	0.26	0.23	0.31	0.21	0.64	0.64	0.63	0.69	0.62
25	0.10	0.15	0.08	0.13	0.04	0.11	0.14	0.09	0.14	0.05	0.14	0.15	0.11	0.17	0.08	0.24	0.23	0.19	0.28	0.17	0.38	0.38	0.34	0.43	0.32	0.82	0.83	0.81	0.86	0.81
30	0.12	0.18	0.10	0.15	0.05	0.14	0.17	0.11	0.17	0.07	0.18	0.20	0.14	0.22	0.10	0.32	0.31	0.26	0.37	0.23	0.50	0.50	0.46	0.56	0.44	0.93	0.93	0.93	0.95	0.92
35	0.15	0.20	0.12	0.18	0.07	0.17	0.21	0.13	0.20	0.08	0.23	0.25	0.18	0.28	0.13	0.41	0.40	0.34	0.46	0.30	0.63	0.63	0.59	0.68	0.56	0.98	0.98	0.98	0.99	0.98
40	0.17	0.24	0.15	0.21	0.08	0.20	0.25	0.17	0.24	0.10	0.29	0.31	0.23	0.33	0.17	0.50	0.49	0.43	0.55	0.39	0.74	0.74	0.70	0.79	0.68	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99

$d = 2$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.09	0.04	0.06	0.02	0.06	0.08	0.04	0.06	0.03	0.06	0.06	0.04	0.06	0.03	0.07	0.07	0.05	0.08	0.04	0.09	0.09	0.07	0.09	0.07	0.17	0.17	0.16	0.18	0.16
10	0.07	0.11	0.06	0.08	0.03	0.08	0.10	0.06	0.09	0.04	0.09	0.10	0.06	0.10	0.05	0.13	0.13	0.10	0.14	0.09	0.20	0.20	0.18	0.21	0.17	0.50	0.50	0.49	0.51	0.48
15	0.10	0.14	0.08	0.11	0.04	0.11	0.14	0.09	0.12	0.05	0.15	0.15	0.11	0.16	0.08	0.24	0.24	0.19	0.26	0.17	0.39	0.39	0.35	0.40	0.33	0.84	0.84	0.83	0.85	0.82
20	0.14	0.19	0.11	0.15	0.06	0.16	0.19	0.12	0.17	0.08	0.22	0.23	0.17	0.24	0.13	0.39	0.38	0.33	0.41	0.29	0.60	0.60	0.56	0.62	0.54	0.98	0.98	0.97	0.98	0.97
25	0.19	0.25	0.16	0.20	0.09	0.22	0.26	0.18	0.23	0.11	0.32	0.33	0.25	0.33	0.20	0.55	0.54	0.48	0.57	0.44	0.79	0.79	0.76	0.80	0.74	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
30	0.25	0.32	0.22	0.26	0.13	0.30	0.35	0.25	0.31	0.16	0.43	0.44	0.36	0.45	0.28	0.70	0.70	0.64	0.72	0.60	0.91	0.91	0.89	0.92	0.88	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.32	0.39	0.28	0.33	0.17	0.38	0.43	0.33	0.40	0.22	0.54	0.56	0.47	0.56	0.38	0.83	0.82	0.78	0.84	0.74	0.97	0.97	0.96	0.97	0.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.39	0.47	0.35	0.40	0.22	0.47	0.53	0.42	0.49	0.29	0.66	0.67	0.58	0.67	0.50	0.91	0.91	0.88	0.92	0.85	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$d = 3$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.06	0.08	0.08	0.03	0.06	0.06	0.07	0.07	0.03	0.05	0.05	0.06	0.07	0.03	0.06	0.06	0.06	0.08	0.04	0.07	0.06	0.07	0.09	0.06	0.10	0.10	0.10	0.13	0.10
10	0.06	0.06	0.09	0.08	0.04	0.06	0.06	0.08	0.08	0.04	0.06	0.06	0.07	0.09	0.04	0.08	0.08	0.08	0.11	0.07	0.12	0.11	0.12	0.14	0.10	0.29	0.29	0.29	0.34	0.28
15	0.07	0.07	0.10	0.09	0.04	0.07	0.08	0.09	0.10	0.05	0.09	0.09	0.09	0.11	0.06	0.13	0.13	0.13	0.16	0.10	0.20	0.20	0.20	0.25	0.18	0.58	0.58	0.58	0.63	0.57
20	0.08	0.09	0.11	0.11	0.05	0.09	0.10	0.11	0.12	0.06	0.12	0.12	0.13	0.15	0.08	0.20	0.19	0.20	0.24	0.16	0.34	0.34	0.34	0.39	0.31	0.84	0.84	0.84	0.87	0.83
25	0.10	0.11	0.14	0.13	0.06	0.12	0.12	0.14	0.15	0.07	0.16	0.16	0.17	0.19	0.11	0.29	0.28	0.29	0.33	0.24	0.50	0.50	0.50	0.56	0.47	0.96	0.96	0.96	0.97	0.96
30	0.13	0.13	0.17	0.16	0.08	0.15	0.15	0.18	0.18	0.10	0.21	0.21	0.22	0.25	0.15	0.39	0.39	0.40	0.45	0.34	0.66	0.66	0.66	0.71	0.63	0.99	0.99	0.99	1.00	0.99
35	0.15	0.16	0.20	0.19	0.10	0.19	0.19	0.22	0.22	0.12	0.27	0.27	0.29	0.32	0.20	0.51	0.50	0.51	0.57	0.45	0.80	0.79	0.80	0.83	0.77	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.19	0.19	0.24	0.23	0.12	0.22	0.23	0.27	0.27	0.15	0.34	0.34	0.36	0.39	0.26	0.63	0.63	0.63	0.68	0.57	0.90	0.89	0.90	0.92	0.88	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$d = 3$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (20, 40)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.07	0.08	0.06	0.03	0.06	0.06	0.08	0.06	0.04	0.06	0.06	0.07	0.07	0.04	0.07	0.07	0.07	0.08	0.06	0.09	0.09	0.09	0.10	0.08	0.21	0.21	0.21	0.23	0.21
10	0.07	0.08	0.10	0.08	0.04	0.08	0.09	0.10	0.09	0.05	0.10	0.10	0.11	0.10	0.07	0.15	0.15	0.15	0.16	0.12	0.25	0.25	0.25	0.26	0.23	0.69	0.69	0.69	0.70	0.68
15	0.10	0.11	0.14	0.11	0.06	0.12	0.13	0.15	0.13	0.07	0.16	0.16	0.17	0.17	0.11	0.29	0.29	0.29	0.31	0.25	0.51	0.51	0.51	0.53	0.48	0.97	0.97	0.97	0.97	0.96
20	0.14	0.16	0.19	0.15	0.09	0.17	0.18	0.21	0.18	0.11	0.25	0.25	0.27	0.27	0.19	0.48	0.47	0.48	0.50	0.42	0.77	0.77	0.77	0.78	0.74	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
25	0.20	0.22	0.26	0.21	0.13	0.24	0.26	0.29	0.26	0.17	0.37	0.38	0.39	0.39	0.29	0.68	0.67	0.68	0.69	0.63	0.93	0.92	0.93	0.93	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
30	0.27	0.30	0.34	0.29	0.19	0.33	0.35	0.39	0.35	0.25	0.51	0.51	0.53	0.53	0.42	0.84	0.83	0.84	0.85	0.80	0.98	0.98	0.98	0.99	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.36	0.39	0.43	0.37	0.26	0.44	0.46	0.50	0.46	0.33	0.65	0.65	0.67	0.66	0.56	0.93	0.93	0.93	0.94	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.44	0.48	0.53	0.46	0.33	0.55	0.57	0.60	0.56	0.43	0.76	0.77	0.78	0.78	0.68	0.98	0.98	0.98	0.98	0.97	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Table 3: Power of the tests based on P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each) at nominal 0.05 significance level, when testing $k = 3$ groups with coplanar mean directions, two of which formed an angle of 2δ degrees and the third was the bisector of this angle, for $d = 2, 3$, selected sample sizes and values of $\rho \geq 0.45$.

$d = 2$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (10, 10, 10)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.11	0.04	0.08	0.02	0.06	0.09	0.04	0.08	0.02	0.06	0.06	0.03	0.08	0.02	0.07	0.07	0.05	0.09	0.04	0.08	0.08	0.07	0.11	0.06	0.16	0.17	0.15	0.20	0.15
10	0.08	0.13	0.06	0.10	0.03	0.08	0.11	0.05	0.10	0.03	0.09	0.10	0.06	0.12	0.04	0.13	0.12	0.09	0.16	0.08	0.20	0.20	0.17	0.24	0.16	0.53	0.54	0.52	0.59	0.51
15	0.11	0.17	0.08	0.13	0.04	0.11	0.15	0.08	0.14	0.04	0.14	0.15	0.09	0.18	0.07	0.24	0.24	0.18	0.29	0.16	0.41	0.40	0.35	0.46	0.33	0.88	0.88	0.87	0.91	0.87
20	0.14	0.22	0.11	0.18	0.05	0.17	0.21	0.12	0.20	0.07	0.23	0.24	0.16	0.27	0.11	0.40	0.39	0.32	0.46	0.29	0.65	0.64	0.59	0.70	0.56	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
25	0.19	0.28	0.16	0.23	0.08	0.23	0.29	0.17	0.27	0.10	0.33	0.35	0.25	0.38	0.18	0.58	0.57	0.49	0.64	0.44	0.84	0.84	0.80	0.87	0.78	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
30	0.25	0.36	0.21	0.30	0.10	0.31	0.38	0.24	0.36	0.14	0.45	0.48	0.35	0.51	0.27	0.75	0.74	0.66	0.79	0.61	0.95	0.94	0.92	0.96	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.32	0.45	0.28	0.38	0.14	0.39	0.48	0.33	0.45	0.20	0.57	0.60	0.47	0.62	0.37	0.87	0.86	0.80	0.89	0.76	0.99	0.99	0.98	0.99	0.97	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.40	0.53	0.36	0.45	0.19	0.48	0.58	0.42	0.54	0.26	0.68	0.71	0.59	0.73	0.47	0.94	0.94	0.90	0.95	0.87	1.00	1.00	0.99	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$d = 2$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.07	0.11	0.05	0.07	0.02	0.07	0.10	0.05	0.08	0.03	0.08	0.09	0.05	0.09	0.03	0.11	0.10	0.07	0.12	0.06	0.16	0.16	0.13	0.17	0.12	0.41	0.42	0.40	0.43	0.40
10	0.11	0.17	0.09	0.12	0.04	0.13	0.17	0.09	0.14	0.05	0.18	0.19	0.12	0.19	0.09	0.31	0.30	0.24	0.33	0.21	0.52	0.52	0.46	0.53	0.45	0.96	0.96	0.95	0.96	0.95
15	0.20	0.28	0.16	0.21	0.08	0.24	0.30	0.18	0.25	0.11	0.35	0.37	0.26	0.37	0.20	0.62	0.61	0.53	0.64	0.50	0.87	0.87	0.84	0.88	0.82	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
20	0.32	0.42	0.27	0.33	0.15	0.39	0.47	0.32	0.41	0.21	0.57	0.59	0.47	0.59	0.38	0.87	0.86	0.81	0.88	0.78	0.99	0.99	0.98	0.99	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
25	0.47	0.58	0.42	0.48	0.25	0.57	0.64	0.50	0.58	0.35	0.77	0.79	0.69	0.78	0.59	0.97	0.97	0.95	0.98	0.94	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
30	0.62	0.72	0.57	0.63	0.37	0.73	0.79	0.67	0.74	0.51	0.90	0.92	0.86	0.91	0.78	1.00	1.00	0.99	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.74	0.84	0.71	0.76	0.52	0.85	0.89	0.81	0.86	0.66	0.97	0.97	0.94	0.97	0.90	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.85	0.91	0.83	0.86	0.65	0.92	0.95	0.90	0.93	0.79	0.99	0.99	0.98	0.99	0.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$d = 3$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (10, 10, 10)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.07	0.09	0.08	0.03	0.06	0.06	0.08	0.08	0.03	0.06	0.06	0.07	0.08	0.04	0.07	0.07	0.07	0.10	0.05	0.09	0.09	0.09	0.12	0.08	0.22	0.22	0.22	0.27	0.21
10	0.08	0.08	0.11	0.10	0.04	0.08	0.08	0.10	0.11	0.04	0.10	0.09	0.11	0.12	0.06	0.15	0.15	0.15	0.19	0.12	0.26	0.25	0.26	0.31	0.23	0.74	0.74	0.74	0.79	0.73
15	0.11	0.12	0.15	0.14	0.06	0.12	0.12	0.15	0.15	0.07	0.16	0.16	0.18	0.20	0.11	0.30	0.29	0.30	0.36	0.25	0.55	0.54	0.55	0.61	0.51	0.99	0.98	0.99	0.99	0.98
20	0.15	0.16	0.21	0.19	0.08	0.18	0.19	0.22	0.22	0.11	0.26	0.26	0.28	0.31	0.18	0.52	0.51	0.52	0.58	0.45	0.82	0.82	0.82	0.86	0.79	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
25	0.21	0.22	0.28	0.25	0.12	0.26	0.27	0.31	0.31	0.16	0.39	0.39	0.42	0.45	0.29	0.73	0.72	0.73	0.77	0.66	0.96	0.96	0.96	0.97	0.95	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
30	0.28	0.30	0.37	0.33	0.18	0.35	0.37	0.42	0.41	0.24	0.54	0.54	0.57	0.60	0.42	0.88	0.88	0.88	0.91	0.83	0.99	0.99	0.99	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.36	0.38	0.47	0.42	0.24	0.46	0.48	0.54	0.52	0.33	0.68	0.68	0.71	0.73	0.57	0.96	0.96	0.96	0.97	0.94	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.46	0.47	0.57	0.52	0.32	0.57	0.59	0.65	0.63	0.43	0.79	0.80	0.83	0.84	0.69	0.99	0.99	0.99	0.99	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$d = 3$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.07	0.08	0.11	0.07	0.04	0.07	0.08	0.10	0.08	0.04	0.08	0.08	0.09	0.09	0.05	0.12	0.12	0.12	0.13	0.09	0.19	0.19	0.19	0.21	0.17	0.59	0.59	0.59	0.61	0.58
10	0.11	0.14	0.17	0.13	0.07	0.14	0.15	0.18	0.15	0.08	0.20	0.20	0.22	0.21	0.14	0.39	0.38	0.39	0.41	0.33	0.68	0.68	0.68	0.70	0.65	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
15	0.21	0.24	0.30	0.23	0.13	0.27	0.29	0.33	0.29	0.18	0.42	0.43	0.45	0.44	0.32	0.76	0.76	0.76	0.78	0.71	0.97	0.97	0.97	0.97	0.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
20	0.36	0.40	0.47	0.38	0.25	0.46	0.48	0.53	0.48	0.34	0.68	0.68	0.71	0.70	0.58	0.96	0.96	0.96	0.96	0.94	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
25	0.54	0.58	0.64	0.56	0.40	0.66	0.69	0.73	0.68	0.53	0.87	0.88	0.89	0.88	0.81	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
30	0.71	0.75	0.80	0.73	0.57	0.82	0.84	0.87	0.84	0.72	0.97	0.97	0.97	0.97	0.94	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.84	0.87	0.90	0.85	0.73	0.93	0.94	0.95	0.93	0.86	0.99	0.99	1.00	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.92	0.94	0.96	0.93	0.85	0.97	0.98	0.99	0.98	0.94	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Table 4: Power of the tests P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each) at nominal size 0.05, when testing $k = 3$ groups, two of which shared a common mean direction and the third had a mean direction δ degrees away, for $d = 2, 3$, selected sample sizes and $\rho \geq 0.45$.

$d = 2$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (10, 10, 10)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.10	0.04	0.08	0.02	0.06	0.08	0.03	0.08	0.02	0.05	0.06	0.03	0.07	0.02	0.06	0.05	0.04	0.08	0.03	0.06	0.06	0.05	0.08	0.04	0.08	0.09	0.08	0.11	0.08
10	0.07	0.11	0.05	0.09	0.02	0.06	0.09	0.04	0.08	0.02	0.06	0.07	0.04	0.09	0.03	0.07	0.07	0.05	0.10	0.04	0.10	0.10	0.08	0.12	0.07	0.21	0.21	0.20	0.25	0.19
15	0.07	0.12	0.05	0.10	0.02	0.08	0.10	0.05	0.10	0.03	0.08	0.09	0.05	0.10	0.03	0.11	0.10	0.07	0.14	0.06	0.16	0.16	0.13	0.20	0.12	0.42	0.42	0.40	0.48	0.40
20	0.08	0.14	0.06	0.11	0.03	0.09	0.12	0.06	0.12	0.03	0.10	0.11	0.07	0.13	0.05	0.16	0.15	0.11	0.20	0.10	0.25	0.25	0.21	0.30	0.20	0.66	0.67	0.65	0.71	0.64
25	0.10	0.16	0.08	0.13	0.04	0.11	0.15	0.08	0.14	0.04	0.14	0.15	0.09	0.17	0.06	0.23	0.22	0.17	0.27	0.15	0.38	0.38	0.33	0.43	0.31	0.85	0.85	0.84	0.88	0.84
30	0.12	0.19	0.09	0.15	0.04	0.13	0.18	0.09	0.17	0.05	0.18	0.19	0.12	0.22	0.09	0.31	0.30	0.24	0.37	0.21	0.52	0.52	0.46	0.57	0.44	0.95	0.96	0.95	0.97	0.95
35	0.15	0.22	0.11	0.18	0.05	0.16	0.22	0.12	0.20	0.07	0.23	0.25	0.16	0.28	0.12	0.41	0.40	0.33	0.47	0.29	0.66	0.66	0.60	0.71	0.58	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
40	0.17	0.25	0.14	0.21	0.07	0.20	0.26	0.15	0.24	0.08	0.29	0.31	0.21	0.34	0.15	0.52	0.51	0.43	0.57	0.38	0.78	0.77	0.73	0.82	0.70	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$d = 2$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.10	0.04	0.06	0.02	0.06	0.08	0.04	0.06	0.02	0.06	0.06	0.03	0.07	0.02	0.07	0.07	0.04	0.08	0.04	0.09	0.09	0.07	0.10	0.06	0.17	0.17	0.16	0.18	0.16
10	0.07	0.12	0.05	0.08	0.03	0.08	0.11	0.05	0.08	0.03	0.09	0.10	0.06	0.10	0.04	0.14	0.13	0.09	0.15	0.08	0.21	0.21	0.18	0.22	0.17	0.57	0.57	0.55	0.58	0.54
15	0.10	0.16	0.08	0.11	0.04	0.11	0.15	0.08	0.12	0.05	0.15	0.16	0.10	0.16	0.07	0.26	0.25	0.19	0.27	0.17	0.43	0.43	0.38	0.45	0.36	0.91	0.91	0.90	0.92	0.90
20	0.14	0.21	0.11	0.15	0.06	0.17	0.21	0.12	0.18	0.07	0.24	0.25	0.17	0.25	0.13	0.43	0.42	0.34	0.45	0.32	0.68	0.68	0.63	0.69	0.61	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
25	0.20	0.28	0.16	0.21	0.08	0.24	0.30	0.18	0.25	0.11	0.35	0.37	0.26	0.37	0.20	0.62	0.61	0.53	0.64	0.50	0.87	0.87	0.84	0.88	0.82	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
30	0.27	0.36	0.22	0.28	0.12	0.32	0.39	0.26	0.34	0.16	0.49	0.50	0.39	0.50	0.31	0.79	0.78	0.72	0.80	0.68	0.96	0.96	0.95	0.97	0.94	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.35	0.45	0.30	0.36	0.17	0.43	0.50	0.36	0.44	0.23	0.62	0.64	0.52	0.63	0.42	0.90	0.90	0.85	0.91	0.83	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.43	0.55	0.39	0.45	0.22	0.53	0.61	0.46	0.55	0.32	0.74	0.76	0.65	0.75	0.55	0.96	0.96	0.94	0.96	0.92	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$d = 3$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (10, 10, 10)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.06	0.09	0.08	0.03	0.06	0.06	0.07	0.08	0.03	0.05	0.05	0.06	0.08	0.03	0.06	0.06	0.06	0.08	0.04	0.06	0.06	0.06	0.08	0.05	0.10	0.10	0.10	0.13	0.09
10	0.06	0.07	0.09	0.08	0.03	0.06	0.07	0.08	0.08	0.03	0.06	0.06	0.07	0.09	0.04	0.08	0.08	0.08	0.10	0.06	0.11	0.11	0.11	0.14	0.09	0.28	0.28	0.28	0.34	0.28
15	0.07	0.08	0.11	0.10	0.04	0.07	0.08	0.10	0.10	0.04	0.08	0.08	0.09	0.11	0.05	0.12	0.12	0.12	0.16	0.09	0.20	0.20	0.20	0.24	0.18	0.60	0.60	0.60	0.66	0.59
20	0.08	0.09	0.12	0.11	0.04	0.09	0.10	0.12	0.12	0.05	0.11	0.11	0.12	0.14	0.07	0.19	0.18	0.19	0.23	0.15	0.34	0.33	0.34	0.39	0.30	0.87	0.87	0.87	0.90	0.86
25	0.10	0.11	0.14	0.13	0.06	0.11	0.12	0.14	0.14	0.07	0.15	0.15	0.16	0.19	0.10	0.28	0.28	0.28	0.33	0.23	0.51	0.51	0.51	0.57	0.47	0.98	0.98	0.98	0.99	0.98
30	0.12	0.13	0.17	0.16	0.07	0.14	0.15	0.18	0.18	0.08	0.20	0.20	0.22	0.25	0.14	0.39	0.39	0.40	0.45	0.33	0.69	0.68	0.69	0.74	0.65	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.15	0.16	0.21	0.19	0.09	0.18	0.19	0.22	0.22	0.11	0.26	0.26	0.29	0.32	0.19	0.52	0.52	0.53	0.58	0.46	0.83	0.83	0.83	0.87	0.80	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.18	0.19	0.25	0.22	0.11	0.22	0.23	0.27	0.27	0.14	0.34	0.34	0.37	0.39	0.25	0.65	0.65	0.65	0.71	0.58	0.92	0.92	0.92	0.94	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$d = 3$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$

	ρ=0.45					ρ=0.50					ρ=0.60					ρ=0.75					ρ=0.85					ρ=0.95				
δ	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A	P	M	W	G	A
5	0.06	0.07	0.09	0.06	0.03	0.06	0.07	0.08	0.06	0.03	0.06	0.06	0.07	0.07	0.04	0.07	0.07	0.07	0.08	0.05	0.10	0.09	0.10	0.10	0.08	0.23	0.23	0.23	0.25	0.23
10	0.07	0.09	0.12	0.08	0.04	0.08	0.09	0.11	0.09	0.05	0.10	0.10	0.11	0.11	0.06	0.16	0.15	0.16	0.17	0.12	0.27	0.27	0.27	0.29	0.25	0.78	0.77	0.78	0.79	0.77
15	0.10	0.12	0.16	0.11	0.06	0.12	0.13	0.16	0.13	0.07	0.17	0.17	0.18	0.18	0.11	0.32	0.31	0.32	0.34	0.27	0.58	0.58	0.58	0.60	0.54	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
20	0.15	0.18	0.22	0.16	0.09	0.18	0.20	0.23	0.20	0.11	0.27	0.28	0.30	0.29	0.20	0.55	0.54	0.55	0.57	0.48	0.85	0.85	0.85	0.86	0.83	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
25	0.22	0.25	0.30	0.23	0.13	0.27	0.29	0.33	0.29	0.18	0.42	0.42	0.45	0.44	0.32	0.76	0.76	0.76	0.78	0.71	0.97	0.97	0.97	0.97	0.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
30	0.30	0.34	0.39	0.32	0.19	0.38	0.40	0.45	0.40	0.27	0.58	0.58	0.61	0.60	0.47	0.91	0.90	0.91	0.91	0.88	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.40	0.44	0.50	0.42	0.27	0.50	0.53	0.57	0.52	0.37	0.72	0.73	0.75	0.74	0.63	0.97	0.97	0.97	0.98	0.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.50	0.54	0.61	0.52	0.37	0.62	0.65	0.69	0.64	0.49	0.85	0.85	0.87	0.86	0.77	0.99	0.99	1.00	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Table 5: Power of the tests with statistics P and W (100 000 simulated values each) with critical values determined such that both tests achieve exactly the nominal size $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$, when $d = 2$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and the mean directions of the two groups are separated by δ degrees, for values of $\rho \geq 0.45$.

α=0.01

	ρ=0.45		ρ=0.50		ρ=0.60		ρ=0.75		ρ=0.85		ρ=0.95	
δ	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W
5	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02
10	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.07	0.07
15	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.06	0.05	0.19	0.19
20	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.05	0.05	0.10	0.10	0.37	0.37
25	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.09	0.08	0.17	0.16	0.59	0.58
30	0.03	0.03	0.04	0.04	0.06	0.06	0.13	0.12	0.26	0.25	0.78	0.77
35	0.04	0.04	0.05	0.05	0.09	0.09	0.19	0.18	0.37	0.36	0.91	0.90
40	0.05	0.05	0.07	0.07	0.12	0.12	0.25	0.24	0.49	0.47	0.97	0.97

α=0.05

	ρ=0.45		ρ=0.50		ρ=0.60		ρ=0.75		ρ=0.85		ρ=0.95	
δ	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W
5	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.09	0.09
10	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.06	0.08	0.08	0.10	0.10	0.21	0.21
15	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08	0.12	0.12	0.17	0.17	0.41	0.41
20	0.08	0.08	0.09	0.09	0.11	0.11	0.17	0.17	0.26	0.26	0.64	0.63
25	0.10	0.10	0.11	0.11	0.14	0.14	0.24	0.23	0.38	0.37	0.82	0.82
30	0.12	0.11	0.13	0.13	0.19	0.18	0.32	0.31	0.50	0.49	0.93	0.93
35	0.14	0.14	0.16	0.16	0.24	0.23	0.41	0.40	0.64	0.62	0.98	0.98
40	0.16	0.16	0.20	0.20	0.29	0.29	0.50	0.49	0.74	0.73	1.00	1.00

α=0.1

	ρ=0.45		ρ=0.50		ρ=0.60		ρ=0.75		ρ=0.85		ρ=0.95	
δ	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W
5	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12	0.12	0.16	0.16
10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12	0.12	0.14	0.14	0.18	0.18	0.32	0.32
15	0.12	0.12	0.13	0.13	0.15	0.15	0.19	0.19	0.27	0.27	0.55	0.55
20	0.14	0.14	0.15	0.15	0.18	0.18	0.27	0.26	0.38	0.38	0.76	0.76
25	0.16	0.16	0.18	0.18	0.23	0.23	0.35	0.35	0.51	0.51	0.90	0.90
30	0.19	0.19	0.22	0.22	0.29	0.29	0.45	0.44	0.64	0.63	0.97	0.97
35	0.22	0.22	0.25	0.26	0.35	0.35	0.54	0.53	0.76	0.75	0.99	0.99
40	0.25	0.26	0.30	0.30	0.41	0.41	0.63	0.63	0.84	0.84	1.00	1.00

Table 6: Power of the tests with statistics P and W (100 000 simulated values each) with critical values determined such that both tests achieve exactly the nominal size $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$, when $d = 3$, $k = 3$, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 30, 40)$, two of the groups have a common mean direction and the third group has a mean direction δ degrees away, for values of $\rho \geq 0.45$.

α=0.01

	ρ=0.45		ρ=0.50		ρ=0.60		ρ=0.75		ρ=0.85		ρ=0.95	
δ	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W
5	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.09	0.09
10	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.05	0.05	0.11	0.11	0.56	0.56
15	0.03	0.03	0.03	0.03	0.06	0.06	0.14	0.14	0.34	0.34	0.96	0.96
20	0.04	0.05	0.06	0.06	0.11	0.11	0.32	0.32	0.66	0.66	1.00	1.00
25	0.07	0.08	0.10	0.11	0.21	0.21	0.54	0.55	0.90	0.90	1.00	1.00
30	0.12	0.12	0.17	0.18	0.34	0.35	0.77	0.77	0.98	0.98	1.00	1.00
35	0.18	0.19	0.26	0.27	0.50	0.51	0.91	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.26	0.27	0.37	0.39	0.66	0.67	0.98	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00

α=0.05

	ρ=0.45		ρ=0.50		ρ=0.60		ρ=0.75		ρ=0.85		ρ=0.95	
δ	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W
5	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.07	0.07	0.09	0.09	0.23	0.23
10	0.07	0.07	0.08	0.08	0.10	0.10	0.16	0.16	0.27	0.27	0.77	0.77
15	0.10	0.10	0.12	0.12	0.17	0.17	0.32	0.32	0.58	0.58	0.99	0.99
20	0.15	0.15	0.18	0.18	0.27	0.28	0.55	0.55	0.85	0.85	1.00	1.00
25	0.21	0.21	0.27	0.27	0.42	0.42	0.76	0.76	0.97	0.97	1.00	1.00
30	0.29	0.30	0.38	0.38	0.58	0.58	0.91	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.39	0.40	0.50	0.51	0.72	0.73	0.97	0.97	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.49	0.51	0.62	0.63	0.85	0.85	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

α=0.1

	ρ=0.45		ρ=0.50		ρ=0.60		ρ=0.75		ρ=0.85		ρ=0.95	
δ	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W
5	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12	0.12	0.14	0.14	0.17	0.17	0.35	0.35
10	0.13	0.13	0.14	0.14	0.17	0.17	0.25	0.25	0.39	0.39	0.86	0.86
15	0.18	0.18	0.20	0.20	0.26	0.26	0.45	0.45	0.70	0.70	1.00	1.00
20	0.24	0.24	0.28	0.28	0.39	0.40	0.67	0.67	0.91	0.91	1.00	1.00
25	0.32	0.32	0.38	0.39	0.55	0.55	0.85	0.85	0.99	0.99	1.00	1.00
30	0.42	0.42	0.50	0.51	0.70	0.70	0.95	0.95	1.00	1.00	1.00	1.00
35	0.52	0.53	0.62	0.63	0.82	0.82	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
40	0.62	0.64	0.73	0.74	0.91	0.91	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Figure 3: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 4$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and values of $\rho \geq 0.45$.

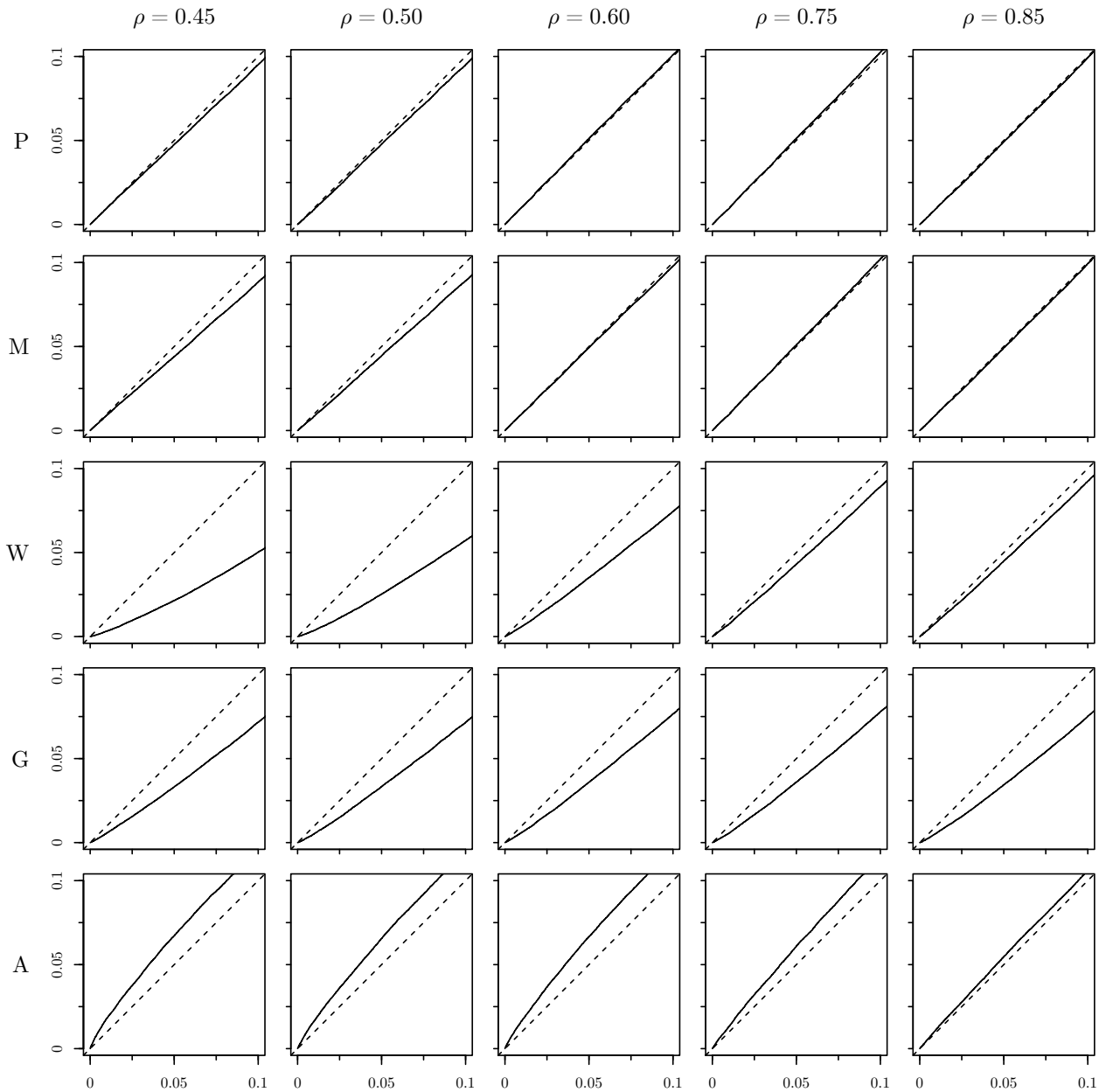

Figure 4: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 10$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and values of $\rho \geq 0.45$.

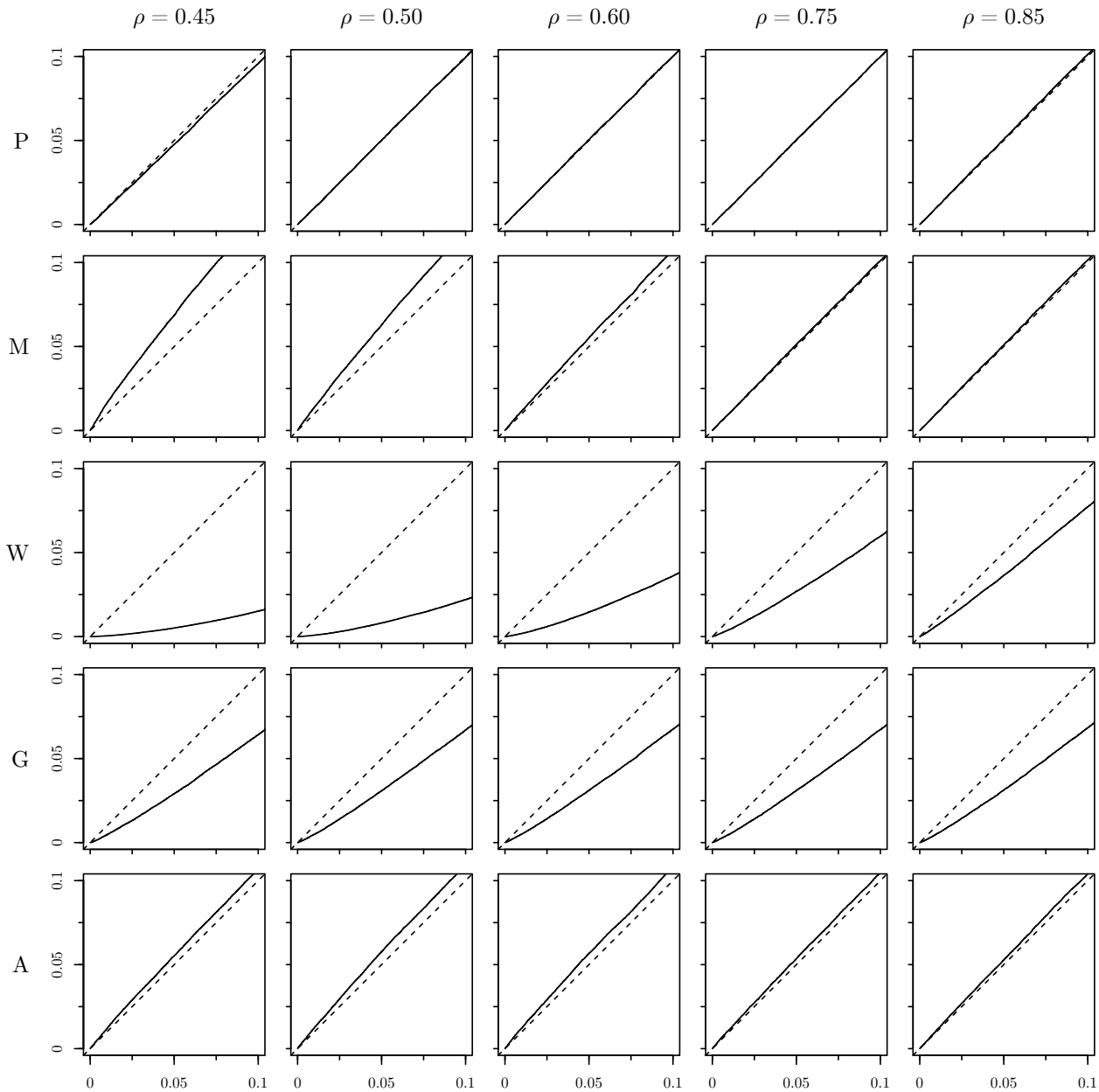

Figure 5: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 100$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and values of $\rho \geq 0.50$.

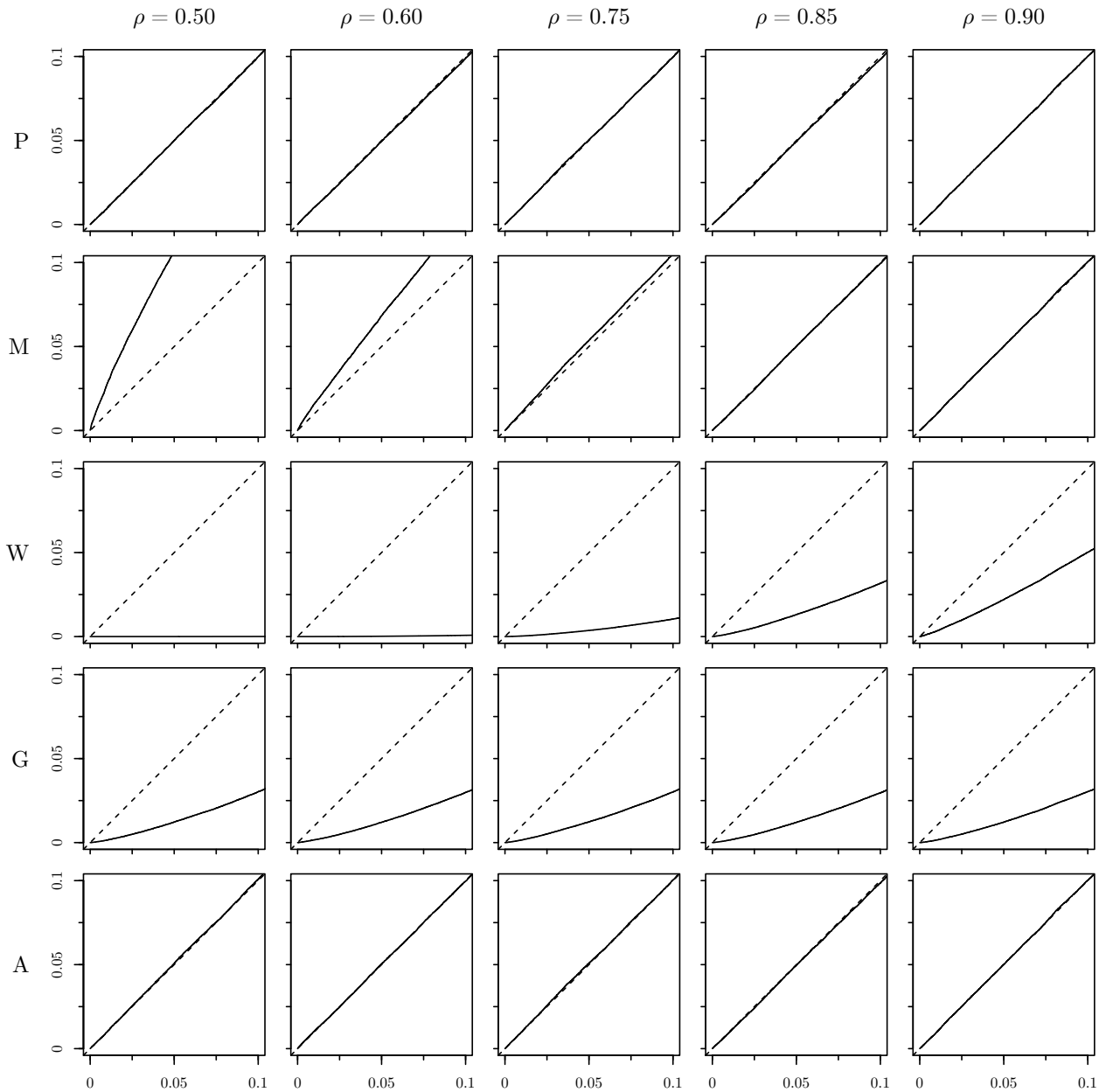

Figure 6: Uniform quantiles (horizontal axis) versus ordered p-values (vertical axis) from the tests based on the statistics P, M, W, G, and A (100 000 simulated values each), for $d = 100$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and values of $\rho \leq 0.45$.

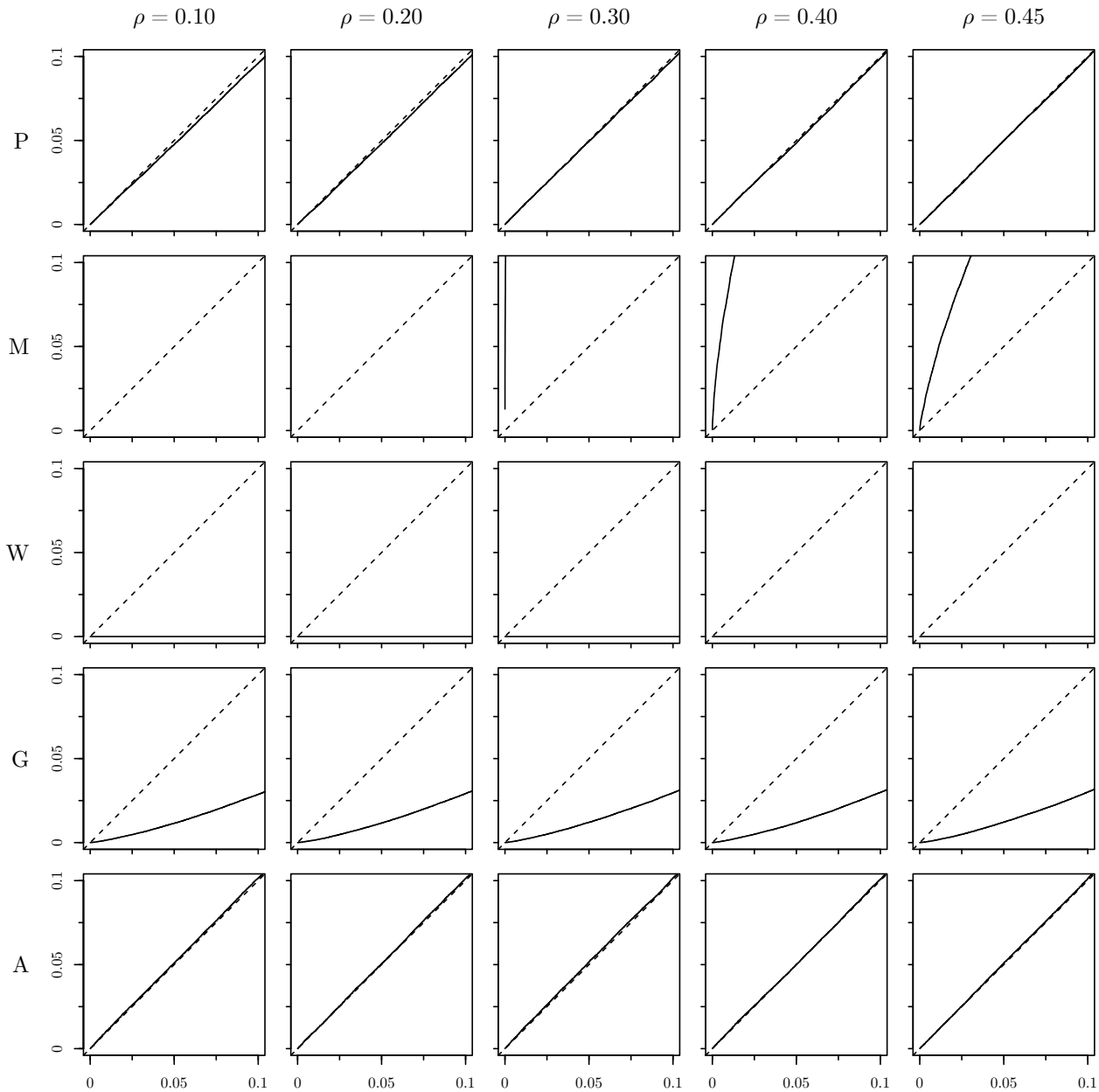

Figure 7: Power of the tests with W (dashed line), G (two-dash), P (solid), M (dotted), A (dotdash) (100 000 simulated values each) for $d = 4$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and $\rho = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.60, 0.75, 0.85, 0.95$, at nominal size 0.05. Angle $= 1, \ldots, 8$, corresponds to separation between the population mean directions $\delta = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ degrees, respectively.

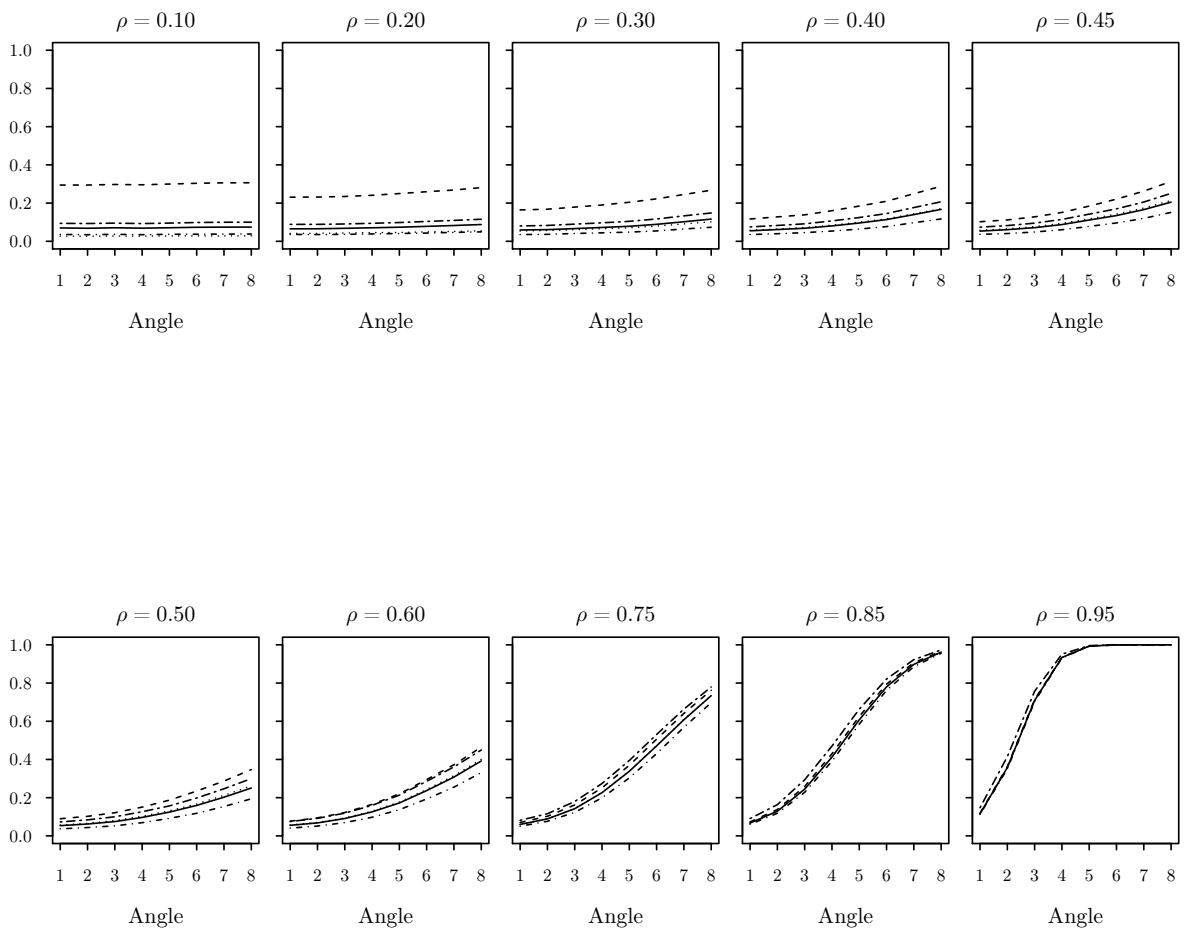

Figure 8: Power of the tests with W (dashed line), G (two-dash), P (solid), M (dotted), A (dotdash) (100 000 simulated values each) for $d = 10$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and $\rho = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.60, 0.75, 0.85, 0.95$, at nominal size 0.05. Angle $= 1, \ldots, 8$, corresponds to separation between the population mean directions $\delta = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ degrees, respectively.

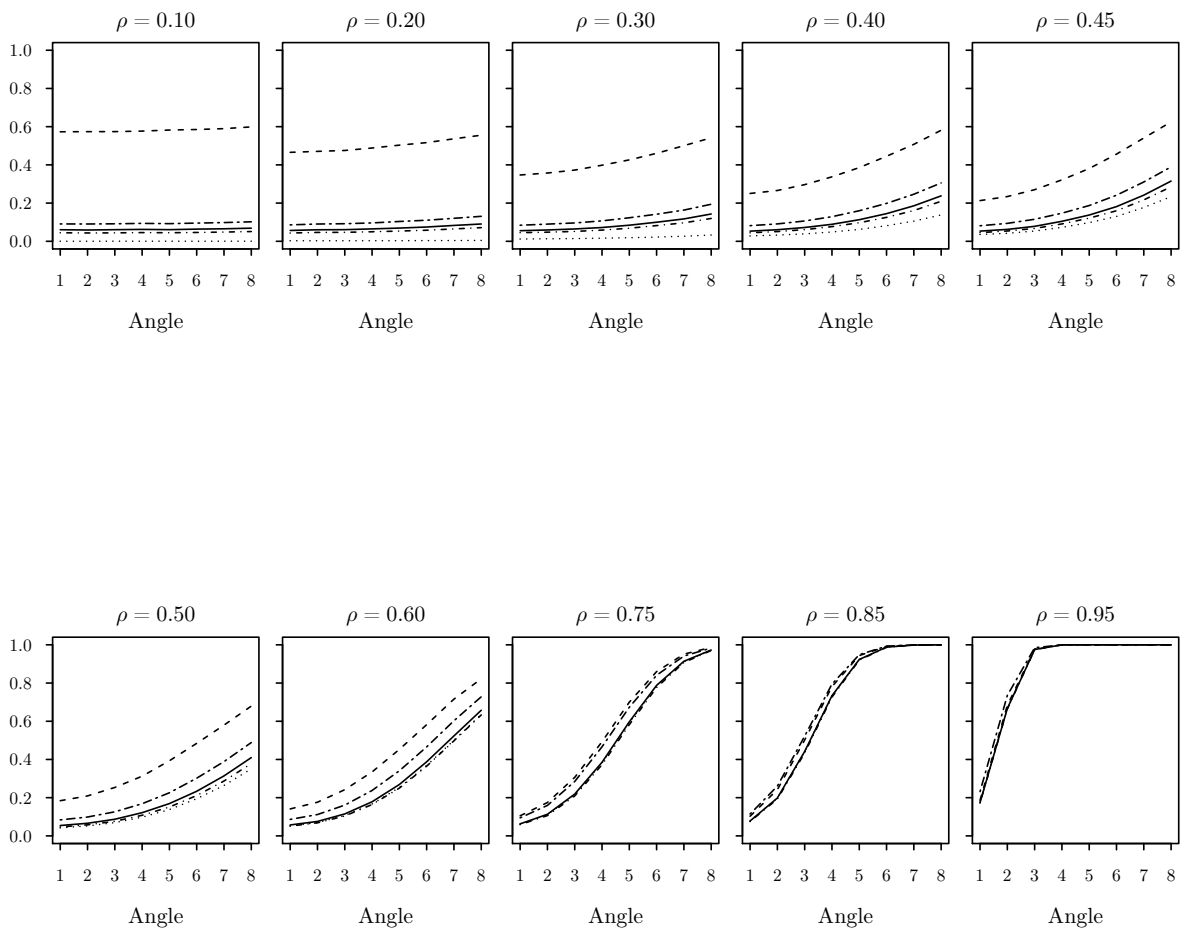
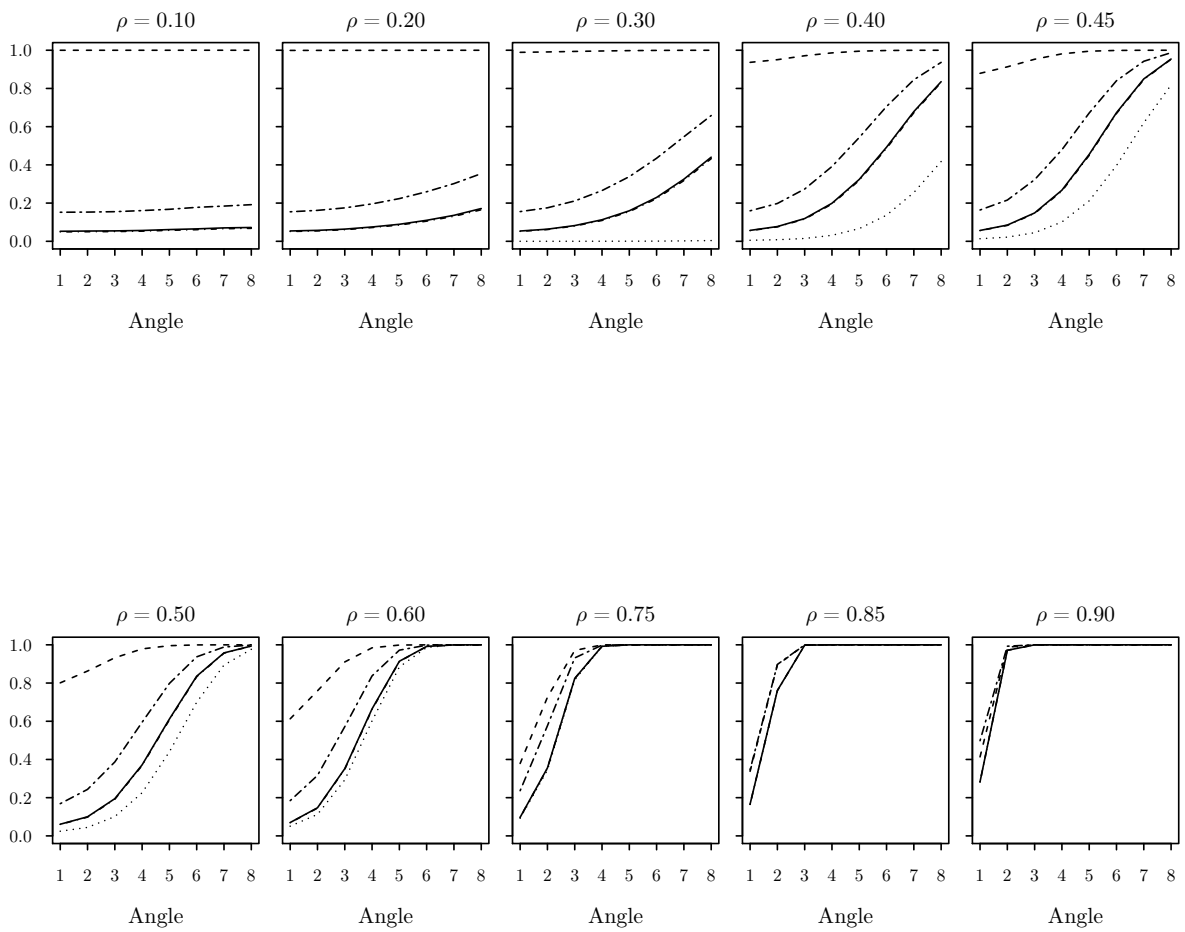
Figure 9: Power of the tests with W (dashed line), G (two-dash), P (solid), M (dotted), A (dotdash) (100 000 simulated values each) for $d = 100$, $k = 2$, $(n_1, n_2) = (10, 10)$, and $\rho = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.45, 0.50, 0.60, 0.75, 0.85, 0.90$, at nominal size 0.05. Angle $= 1, \ldots, 8$, corresponds to separation between the population mean directions $\delta = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ degrees, respectively.